

**PUBLICATIONS
DE L'INSTITUT
FRANÇAIS
DU PÉTROLE**

**PROGRAMMATION
LINÉAIRE
APPLIQUÉE**

H. MAURIN

BIBLIOTHEQUE DU CERIST

COLLECTION
SCIENCE ET TECHNIQUE DU PÉTROLE

- 0 Cinétique chimique appliquée. J. C. JUNGERS et collaborateurs (*épuisé*).
- 1 Le pétrole. J. FLANDRIN et J. CHAPELLE.
- 2 A. B. C. du graissage. J. L. E. GROFF
- 3 Les huiles pour moteurs et le graissage des moteurs. A. SCHILLING (2 vol.).
- 4 U.R.S.S. second producteur de pétrole du monde. J. CHAPELLE et S. KETCHIAN.
- 5 Le pétrole. Raffinage et génie chimique. *Sous la direction de P. WUITHIER* (2 vol.).
2^e édition entièrement mise à jour.
- 6 Les piles à combustible. *Ouvrage collectif publié sous le patronage de la Délégation Générale à la Recherche Scientifique et Technique.*
- 7 L'industrie pétrochimique et ses possibilités d'implantation dans les pays en voie de développement. C. MERCIER *avec la collaboration de B. BARTOLI et M. BARRAQUÉ.*
- 7^{bis} Petrochemical industry and its possibilities of establishment in the developing countries. C. MERCIER *with the assistance of B. BARTOLI and M. BARRAQUÉ.*
- 8 Programmation linéaire appliquée. H. MAURIN.
- 9 L'analyse cinétique de la transformation chimique. J. C. JUNGERS et L. SAJUS *avec la collaboration de I. DE AGUIRRE et D. DECROOCCQ* (2 vol.).
- 10 Thermodynamique générale et applications. R. KLING.
- 11 Oxydations et combustions. A. VAN TIGGELEN et collaborateurs (2 vol.).
- 12 La production d'électricité par conversion magnétohydrodynamique. *Ouvrage collectif.*
- 13 Théorie et interprétation des diagraphies. R. DESBRANDES.
- 14 L'économie des hydrocarbures. J. MASSERON.
- 15 Introduction à la cinétique hétérogène. B. DELMON.
- 16 Carburants et combustibles pour moteurs à combustion interne. J. WEISSMANN et collaborateurs.
- 17 Calcul sur ordinateur des équilibres liquide-vapeur et liquide-liquide. H. RENON, L. ASSELINEAU, G. COHEN et C. RAIMBAULT.
- 18 Les grès du Paléozoïque inférieur au Sahara. Sédimentation et discontinuités. Évolution structurale d'un craton. S. BEUF, B. BIJU-DUVAL, O. DE CHARPAL, P. ROGNON, O. GARIEL et A. BENNACEF.
- 19 Procédés de pétrochimie. Caractéristiques techniques et économiques. P. LEPRINCE, A. CHAUVEL, J. P. CATRY *avec la collaboration de L. CASTEX.*

BIBLIOTHEQUE DU CERIST

C 1931

3
1931

PUBLICATIONS DE L'INSTITUT FRANÇAIS DU PÉTROLE
Collection " Science et Technique du Pétrole " n° 8



HENRI MAURIN

Docteur en Mathématiques Statistiques
Ingénieur E.N.S.P.M.
Directeur du Département Recherche Opérationnelle
de la Société Française des Pétroles BP
Chargé de cours à l'École Nationale Supérieure
du Pétrole et des Moteurs

Préface de

JEAN ABADIE

Agrégé de Mathématiques
Conseiller Scientifique à la Direction des Études
et Recherches de l'Électricité de France

BIBLIOTHEQUE DU CERIST

PROGRAMMATION LINÉAIRE APPLIQUÉE

1967

ÉDITIONS TECHNIP 27, RUE GINOUX 75737 PARIS CEDEX 15



4758

© 1967. Éditions Technip - Paris

Toute reproduction, même partielle, de cet ouvrage
par quelque procédé que ce soit, est rigoureusement
interdite par les lois en vigueur.

ISBN 2-7108-0067-5

PRÉFACE

Que l'on considère l'économie, l'industrie, les processus de production, de distribution, de répartition, ou même toute activité humaine dirigée, on peut dire qu'une des questions fondamentales que la réflexion de notre temps y rencontre est celle de satisfaire au mieux une certaine préférence, étant bien entendu que des contraintes sont imposées à l'ensemble des paramètres sur lesquels on possède une action.

Dans le meilleur cas (souvent rencontré, d'ailleurs), cette préférence se mesure par une fonction, que l'on est capable d'écrire explicitement, des différents paramètres inconnus : c'est le cas, pour ne prendre qu'un exemple, d'une industrie dont l'objectif serait de maximiser son bénéfice, tout en satisfaisant, entre autres contraintes, à certaines normes imposées sur la qualité des différents produits qu'elle fabrique. C'est ainsi que l'on trouve tout naturellement, dans la pratique actuelle de l'économie appliquée ou de la recherche opérationnelle, la branche des mathématiques connue sous le nom de *programmation mathématique* (traduction littérale de l'anglais *mathematical programming*), encore appelée *mathématique des programmes économiques*; d'une façon précise, la programmation mathématique est l'étude d'un problème du type suivant : rendre maximum (ou minimum, suivant les cas) une fonction de plusieurs variables inconnues, lorsque ces inconnues sont liées par un système d'équations et d'inéquations.

Le problème de maximiser une fonction sous des conditions d'égalité est un problème mathématique bien classique (que l'on songe à LAGRANGE, par exemple). Le fait d'étendre la théorie de LAGRANGE et de ses multiplicateurs au cas où il y a aussi (ou même uniquement) des contraintes d'inégalité est relativement nouvelle, et les premiers résultats ne datent que de 1948 (F. JOHN) et 1951 (KUHN et TUCKER).

Lorsque la fonction à maximiser (ou minimiser) est linéaire, et que les contraintes elles-mêmes sont des équations ou inéquations linéaires, on parle alors de *programmation linéaire*.

Historiquement, c'est la programmation linéaire qui s'est développée la première, avec les travaux de G. DANTZIG (1947, publiés seulement en 1951). L'immense succès qu'elle a connu depuis est lié, d'une part au très grand nombre de problèmes pratiques qui se ramènent à la programmation linéaire, d'autre part au développement explosif des ordinateurs électroniques, qui ont permis d'effectuer, à un coût relativement peu important, les calculs nécessités par la méthode du simplexe, de G. DANTZIG.

De nos jours encore, la méthode du simplexe reste, semble-t-il, la meilleure méthode de résolution des programmes linéaires. Quant à la programmation non linéaire, seul le cas où les contraintes sont linéaires, et où la fonction économique est convexe, est entré dans la pratique. La résolution numérique effective des programmes non linéaires plus généraux en est encore à l'état de recherche. Pour longtemps encore, semble-t-il, la programmation linéaire restera l'outil de base de ce nouveau métier que j'appellerai, faute de mieux, *optimiseur*.

Car c'est bien d'un *métier* qu'il s'agit de nos jours. Une culture générale, faite de polyèdres et de *jolis* théorèmes généraux, n'y est certes pas inutile; cela est cependant loin d'être suffisant, et c'est ici, je crois, que je voudrais signaler la grande originalité du livre de M. MAURIN : sans nullement négliger la théorie, il a su en dégager la substantifique moelle et l'exposer d'une façon particulièrement bien adaptée, d'une part à un public d'ingénieurs ou d'élèves-ingénieurs, d'autre part aux applications pratiques. Naturellement, les élèves des facultés des sciences trouveront également ici des compléments nécessaires s'ils désirent s'intéresser aux applications de la programmation linéaire, ou donner un support concret à leurs connaissances.

Je voudrais également louer les dons pédagogiques de l'auteur qui, d'ailleurs, enseigne la programmation linéaire à l'*École Nationale Supérieure du Pétrole et des Moteurs*. Procéder du général au particulier a, peut-être, quelque vertu; l'inverse, toutefois, présente des avantages plus certains pour celui à qui se posent des problèmes qui ne sont pas de purs symboles. Aussi est-ce à juste raison, à mon sens, que M. MAURIN introduit chaque notion ou méthode à l'aide d'un exemple concret simple, et que symétriquement, après l'exposé théorique correspondant, la même question est illustrée d'un exemple concret plus proche de la réalité. Le lecteur voit ainsi se construire devant lui tout un appareil, dont la bonne marche est attestée, au dernier chapitre, par l'étude complète et détaillée d'un problème *réel*, présentant toutes les difficultés que rencontrent les chercheurs opérationnels dans la pratique.

Je crois sincèrement que ce petit livre aidera tous ceux qui ont, dans leur vie professionnelle, à résoudre une ou plusieurs phases du traitement d'un problème de programmation linéaire : mise en équation, résolution numérique, interprétation économique et discussion des résultats. J'ajouterais que le lecteur trouvera toutes les notions d'algèbre dont il pourra avoir besoin (y compris le calcul matriciel) ainsi que tous les résultats théoriques (en particulier ceux qui sont relatifs aux variables duales, aux coûts marginaux et à la paramétrisation). Tant du point de vue théorique que de celui des applications, l'ouvrage de M. MAURIN se suffit donc à lui-même comme livre unique concernant la programmation linéaire destinée à l'ingénieur.

Pourrais-je, toutefois, regretter qu'aucune mention n'est faite des travaux personnels de M. MAURIN sur la paramétrisation de la matrice : cette technique est des plus utiles, mais M. MAURIN a estimé que son exposé entacherait le caractère d'initiation de son livre. Quoi qu'il en soit, je lui souhaite de tout cœur le succès qu'il mérite.

JEAN ABADIE

Agrégé de Mathématiques
Conseiller Scientifique
à la Direction des Études et Recherches
de l'Électricité de France.

BIBLIOTHEQUE DU CERIST

TABLE DES MATIÈRES

PRÉFACE DE J. ABADIE	V
--------------------------------	---

Chapitre I INTRODUCTION

I. Présentation de l'exemple.	1
II. Mise en équation.	2
III. Résolution du problème.	2
IV. Discussion.	6
V. Représentation géométrique.	7
VI. Premières notions sur les coûts marginaux.	11
1. Terminologie.	11
2. Définition du coût marginal.	12
3. Notion de dualité.	14
VII. Utilisation des calculateurs électroniques.	16
VIII. Applications dans le raffinage	17

Chapitre II EXPOSÉ ÉLÉMENTAIRE DE LA MÉTHODE DU SIMPLEXE

A. EXEMPLE DE PROGRAMME DE RAFFINERIE	19
I. Données du problème	19
II. Mise en équation.	21
III. Méthode du tableau simplexe.	22
1. Recherche d'une solution de départ	22
2. Amélioration de la solution trouvée	23
3. Systématisation des calculs.	24
4. Détermination de la solution optimale	27
IV. Utilisation d'un calculateur électronique.	29
B. EXEMPLE DE CONSTITUTION DE DEUX CARBURANTS PAR MÉLANGE DE QUATRE CONSTITUANTS	34
I. Données du problème.	34
II. Mise en équation.	35

BIBLIOTHEQUE DU CERIST

III. Méthode du tableau simplexe	35
1. Recherche d'une solution de départ	35
2. Résolution du programme auxiliaire (phase 1)	37
3. Résolution du problème posé (phase 2).	38
IV. Représentation géométrique	40
V. Utilisation d'un calculateur électronique.	43
C. EXEMPLE DE CONSTITUTION DE TROIS CARBURANTS PAR MÉLANGE DE SIX CONSTITUANTS	45
I. Données du problème.	45
II. Mise en équation.	45
III. Méthode du tableau simplexe.	46
IV. Utilisation d'un calculateur électronique.	48
D. EXERCICES	52

Chapitre III

ALGORITHME DE LA MÉTHODE DU SIMPLEXE

A. ÉTUDE D'UN CAS PARTICULIER.	55
I. Recherche d'une solution réalisable.	55
1. Mise du problème sous forme canonique.	55
2. Définitions	57
3. Recherche d'une première solution réalisable de base.	58
II. Amélioration de la solution initiale	58
1. Principe de la recherche de l'amélioration	58
2. Nouvelle transcription de la solution générale.	60
III. Amélioration d'une solution de base.	62
IV. Convergence de l'algorithme.	66
V. Application au tableau simplexe	68
VI. Organigramme de la méthode du simplexe	71
B. ÉTUDE DU CAS GÉNÉRAL	71

Chapitre IV

UTILISATION DU CALCUL MATRICIEL

A. NOTIONS DE CALCUL MATRICIEL.	75
I. Définitions générales	75
II. Opérations élémentaires	77
III. Multiplication de deux matrices	78
IV. Inverse d'une matrice.	81
a. Résolution d'un système d'équations.	81
b. Notion de déterminant.	85
c. Détermination directe de la matrice inverse	87

BIBLIOTHEQUE DU CERIST

B. APPLICATION A LA PROGRAMMATION LINÉAIRE	90
I. Formulation des problèmes	90
II. Recherche des solutions	92
1. Transcription matricielle des contraintes	92
2. Résolution matricielle	95
3. Exemple numérique de résolution matricielle	98
III. Étude de la fonction économique	99
1. Transcription matricielle	99
2. Exemple numérique	101
3. Application de la transcription matricielle	103
C. COMPLÉMENTS DE CALCUL MATRICIEL	105
I. Inversion d'une matrice partitionnée	105
II. Inversion par multiplications successives	106
D. EXERCICES	110

Chapitre V

MÉTHODES PRATIQUES DE RÉOLUTION DES PROGRAMMES LINÉAIRES

A. MÉTHODE DU TABLEAU SIMPLEXE	111
I. Étude préliminaire	111
II. Forme révisée du simplexe	113
1. Structure des matrices	114
2. Structure du tableau simplexe	115
III. Exemple d'application pratique	117
B. MÉTHODES D'INVERSION PAR MULTIPLICATION	119
I. Rappel de résultats antérieurs	119
II. Amélioration d'une solution de base	120
1. Recherche d'une nouvelle solution extrême de base	120
2. Détermination des formules de transformation	121
III. Méthode de la matrice inverse de base	123
1. Algorithme	123
2. Application numérique	125
3. Intérêt de cette méthode	131
C. EXERCICES	132

Chapitre VI

PARAMÉTRISATION

A. GÉNÉRALITÉS	133
B. PARAMÉTRISATION DU SECOND MEMBRE	134
I. Algorithme	134
1. Recherche d'une solution	134
2. Principe de la méthode de résolution	137

3. Changement de base	139
4. Caractéristiques de la nouvelle solution optimale	141
5. Représentation graphique des variations de la fonction économique.	143
6. Réalisation pratique des calculs	146
II. Premier exemple numérique : problème du restaurateur	147
III. Deuxième exemple numérique : programme de production d'une raffinerie.	151
1. Présentation de l'exemple	151
2. Mise en équation.	152
3. Recherche de la solution optimale initiale.	154
4. Résolution du problème paramétrique	155
C. PARAMÉTRISATION DE LA FONCTION ÉCONOMIQUE	161
I. Algorithme	161
1. Principe de la méthode de résolution.	161
2. Changement de base	163
3. Représentation graphique des variations de la fonction économique.	165
4. Réalisation pratique des calculs	167
II. Exemple numérique : problème du restaurateur.	169
D. EXERCICES	175

Chapitre VII

COÛTS MARGINAUX NOTIONS DE DUALITÉ

A. COÛTS MARGINAUX	177
I. Rappel de résultats antérieurs	177
II. Signification des coûts marginaux.	179
1. Relation avec les variations de la fonction économique	180
2. Structure d'un coût marginal.	182
3. Intérêt de l'assouplissement de certaines contraintes	183
III. Signification des coûts de substitution	184
IV. Stabilité des coûts marginaux	186
V. Premier exemple numérique : problème du restaurateur	188
1. Stabilité de la valeur marginale de 1,5 F pour un oursin	189
2. Stabilité de la valeur marginale de 0,5 F pour une huître.	196
3. Structure de la valeur marginale d'un oursin.	197
a. Cas où le nombre d'oursins est compris entre 0 et 18	197
b. Cas où le nombre d'oursins est compris entre 18 et 42	198
c. Cas où le nombre d'oursins est compris entre 42 et 60	199
4. Structure de la valeur marginals d'une huître.	199
VI. Deuxième exemple numérique : programme de production d'une raffinerie.	200
1. Solution optimale.	201
2. Coûts marginaux à l'optimum.	201

3. Coûts de substitution de 4 F pour le brut n° 4	204
4. Variations du coût marginal du fuel-oil	205
5. Variations du coût marginal du gasoil	211
6. Variations du coût marginal de l'essence	217
7. Discussion des résultats	219
8. Généralisation des résultats	220
9. Structure des coûts marginaux	223
a. Coût marginal de l'essence	223
b. Coût marginal du gasoil	224
c. Coût marginal du fuel-oil	225
10. Analyse d'un coût de substitution	226
VII. Troisième exemple numérique : maximisation du profit d'une raffinerie	228
1. Mise en équation	229
2. Choix d'une solution de base	229
3. Analyse des coûts marginaux	232
4. Solution optimale avec accroissement des ventes	235
5. Analyse des nouveaux coûts marginaux	238
6. Discussion des résultats	241
7. Structure du profit marginal sur l'essence	242
B. NOTIONS DE DUALITÉ	245
I. Définition de la dualité	245
1. Remarques	245
2. Dual d'un problème sous forme canonique	247
II. Théorème fondamental de la dualité	248
1. Relation générale entre les deux fonctions économiques	249
2. Existence d'un optimum fini	250
3. Égalité des fonctions économiques à l'optimum	250
III. Signification des variables duales	252
IV. Variables duales et coûts marginaux	253
1. Variable duale associée à une égalité	254
2. Variable duale d'une contrainte non saturée à l'optimum	254
3. Variable duale d'une contrainte saturée à l'optimum	255
V. Applications de la dualité	255
1. Intérêt de l'assouplissement de certaines contraintes	255
2. Utilisation de la fonction économique duale	256
3. Résolution du problème dual	257
4. Application à la résolution des problèmes de transport	257
VI. Premier exemple numérique : problème du restaurateur	258
1. Résolution du problème dual	258
2. Relation avec le problème primal	259
3. Structure des variables duales	260
VII. Deuxième exemple numérique : dual du problème de minimisation des dépenses d'une raffinerie	261
1. Formulation du problème	261
2. Résolution du problème	262
3. Relation avec le problème primal	262
4. Structure des variables duales	264
5. Comparaison des solutions primale et duale	265
C. EXERCICES	267

Chapitre VIII

INITIATION
A L'OPTIMISATION DES TRANSPORTS

I. Premier exemple numérique	269
1. Présentation de l'exemple	269
2. Mise en équation	270
3. Recherche d'une solution	272
4. Optimisation par la méthode du simplexe	274
5. Expression particulière des coûts directeurs	275
6. Principe de la méthode des grilles	279
7. Optimisation par la méthode des grilles	280
8. Problème dual	286
II. Deuxième exemple numérique	288
1. Présentation de l'exemple	288
2. Mise en équation	289
3. Recherche d'une solution	291
4. Amélioration de la solution actuelle	295
a. Rappel de résultats antérieurs	295
b. Détermination des composantes de u_0	295
c. Détermination des coûts directeurs	297
d. Recherche d'une nouvelle solution de base	297
5. Optimisation par la méthode des grilles	299
III. Problèmes de transport : examen du cas général	304
1. Formulation du problème	304
2. Résolution du problème	305
IV. Exercices	305

Chapitre IX

APPLICATIONS PRATIQUES
DE LA PROGRAMMATION LINÉAIRE

A. CONSTITUTION OPTIMALE DES ESSENCES	307
I. Présentation du problème	307
1. Généralités	307
2. Effet de l'addition d'un antidétonant	308
3. Linéarisation de la contrainte d'éthylation	310
II. Application pratique	311
III. Formulation des contraintes	311
1. Disponibilité en constituant i	311
2. Volume de carburant n° I à fabriquer	311
3. Limitation de la teneur en butane du carburant n° I	312
4. Éthylation des carburants	312
5. Limitation des teneurs en P.T.E.	313
6. Fonction économique	313
IV. Mise en équation	316

V. Recherche d'une solution de base.	317
VI. Application de la méthode du simplexe	318
1. Détermination du tableau simplexe de départ.	318
a. Détermination des composantes de T^{12}	319
b. Détermination des composantes de T^{31}	321
c. Détermination du vecteur-solution t	321
2. Discussion	326
3. Amélioration de la précision.	327
B. PROGRAMME OPTIMAL D'UNE RAFFINERIE.	335
I. Présentation du problème	335
1. Généralités.	335
2. Rendement des bruts	336
3. Spécifications des produits à fabriquer.	336
4. Caractéristiques des produits intermédiaires.	337
5. Données sur le platforming	339
II. Mise en équation.	339
1. Choix des inconnues	339
2. Liste des contraintes	342
3. Second membre	342
4. Formulation des contraintes du bilan-matière	343
a. Bilan gaz : (BIGZ).	344
b. Bilan propane : (BIPR).	344
c. Bilan butane : (BIBU)	345
d. Bilan gasoline : (BIGE).	345
e. Bilan benzine : (BIBZ).	345
f. Bilan naphta léger : (BINL).	345
g. Bilan naphta moyen : (BINM).	345
h. Bilan naphta lourd : (BINH).	346
i. Bilan gasoil léger : (BIGL).	346
j. Bilan gasoil lourd : (BIGH).	346
k. Bilan fuel lourd ordinaire : (BIFH).	346
l. Bilan résidu Hassi-Messaoud : (BIRM).	346
m. Bilan combustibles : (BICB).	347
n. Bilan platforming-stock : (BIPS).	347
p. Bilan en volume du carburant-avo : (BICA).	348
q. Bilan en volume du supercarburant : (BISU).	348
5. Formulation des contraintes particulières au carburant auto	348
a. Contrainte de production : (CPCA).	348
b. Densité minimale : (SDCA)	348
c. Tension de vapeur maximale : (STCA)	348
d. Nombre d'octane minimal : (SNCA)	349
6. Formulation des contraintes particulières au supercarburant	349
a. Contrainte de production : (CPSU).	349
b. Densité maximale : (SDSU).	349
c. Tension de vapeur maximale : (STSU).	350
d. Nombre d'octane minimal : (SNSU)	350
7. Contrainte de production de pétrole : (CPKE)	350
8. Formulation des contraintes particulières au gasoil léger	350
a. Contrainte de production : (CPGL).	350
b. Teneur maximale en soufre : (SSGL).	350
c. Inflammabilité minimale : (SIGL).	351
d. Point de congélation maximal : (SCGL)	353
9. Formulation des contraintes particulières au fuel lourd	354
a. Contrainte de production de fuel spécial : (CPFS)	354
b. Contrainte de production de fuel lourd ordinaire : (CPFH)	354
c. Viscosité maximale du fuel lourd ordinaire : (SVFH).	354

10. Bilan des pertes de fabrication (BIPE)	355
11. Fonction économique.	355
12. Matrice des contraintes.	356
III. Résolution du problème.	356
1. Présentation des données	357
2. Exemple numérique.	360
IV. Interprétation de la solution optimale	360
1. Résultats essentiels	360
2. Constitution des produits finis	362
a. Carburant auto.	362
b. Supercarburant.	363
c. Gasoil léger	364
d. Fuel lourd ordinaire.	364
3. Établissement des principaux bilans.	365
a. Bilan des pertes de fabrication	365
b. Bilan des combustibles	365
c. Bilan global de la raffinerie	365
d. Bilan matière du platforming.	365
e. Bilan matière de la distillation des bruts	367
V. Coûts marginaux et variables duales.	367
1. Valeur duale des produits finis.	367
2. Coût des contraintes.	369
a. Tension de vapeur	369
b. Nombre d'octane	369
c. Teneur en soufre du gasoil léger	370
d. Point de congélation du gasoil léger	370
e. Viscosité du fuel lourd ordinaire	371
3. Coûts de substitution	372
a. Gasoline utilisée comme combustible	372
b. Production de platformat 85 N.O.	372
c. Utilisation du naphtha moyen.	372
d. Utilisation du résidu d'Hassi-Messaoud	372
VI. Influence du prix des bruts.	374
BIBLIOGRAPHIE.	375

BIBLIOTHEQUE DU CERIST