

THESE

présentée à

UNIVERSITE SCIENTIFIQUE ET MEDICALE DE GRENOBLE

INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE GRENOBLE

par

pour obtenir le grade de

Docteur de troisième cycle

Spécialité : MATHEMATIQUES APPLIQUEES

Patrick CHENIN

***Quelques problèmes d'interpolation
à plusieurs variables.***

Thèse soutenue le 26 juin 1974 devant la Commission d'Examen :

Président : Monsieur N. GASTINEL
Examineurs { Monsieur M. ATTEIA
Monsieur P.J. LAURENT
Monsieur B. MALGRANGE

Président : Monsieur Michel SOUTIF
Vice-Président : Monsieur Gabriel CAU

PROFESSEURS TITULAIRES

MM.	ANGLES D'AURIAC Paul	Mécanique des fluides
	ARNAUD Georges	Clinique des maladies infectieuses
	ARNAUD Paul	Chimie
	AUBERT Guy	Physique
	AYANT Yves	Physique approfondie
Mme	BARBIER Marie-Jeanne	Electrochimie
MM.	BARBIER Jean-Claude	Physique expérimentale
	BARBIER Reynold	Géologie appliquée
	BARJON Robert	Physique nucléaire
	BARNOUD Fernand	Biosynthèse de la cellulose
	BARRA Jean-René	Statistiques
	BARRIE Joseph	Clinique chirurgicale
	BENOIT Jean	Radioélectricité
	BERNARD Alain	Mathématiques Pures
	BESSON Jean	Electrochimie
	BEZES Henri	Chirurgie générale
	BLAMBERT Maurice	Mathématiques Pures
	BOLLINET Louis	Informatique (IUT B)
	BONNET Georges	Electrotechnique
	BONNET Jean-Louis	Clinique ophtalmologique
	BONNET-EYMARD Joseph	Pathologie médicale
	BONNIER Etienne	Electrochimie Electrometallurgie
	BOUCHERLE André	Chimie et Toxicologie
	BOUCHEZ Robert	Physique nucléaire
	BOUSSARD Jean-Claude	Mathématiques Appliquées
	BRAVARD Yves	Géographie
	BRISSONNEAU Pierre	Physique du solide
	BUYLE-BODIN Maurice	Electronique
	CABANAC Jean	Pathologie chirurgicale
	CABANEL Jean	Clinique rhumatologique et hydrologie
	CALAS François	Anatomie
	CARRAZ Gilbert	Biologie animale et pharmacodynamie
	CAU Gabriel	Médecine légale et Toxicologie
	CAUQUIS Georges	Chimie organique
	CHABAUTY Claude	Mathématiques Pures
	CHARACHON Robert	Oto-Rhino-Laryngologie
	CHATEAU Robert	Thérapeutique
	CHENE Marcel	Chimie papetière
	COEUR André	Pharmacie chimique
	CONTAMIN Robert	Clinique gynécologique
	COUDERC Pierre	Anatomie Pathologique
	CRAYA Antoine	Mécanique

Mme	DEBELMAS Anne-Marie	Matière médicale
MM.	DEBELMAS Jacques	Géologie générale
	DEGRANGE Charles	Zoologie
	DESRE Pierre	Métallurgie
	DESSAUX Georges	Physiologie animale
	DODU Jacques	Mécanique appliquée
	DOLIQUE Jean-Michel	Physique des plasmas
	DREYFUS Bernard	Thermodynamique
	DUCROS Pierre	Cristallographie
	DUGOIS Pierre	Clinique de Dermatologie et Syphiligraphie
	FAU René	Clinique neuro-psychiatrique
	FELICI Noël	Electrostatique
	GAGNAIRE Didier	Chimie physique
	GALLISSOT François	Mathématiques Pures
	GALVANI Octave	Mathématiques Pures
	GASTINEL Noël	Analyse numérique
	GEINDRE Michel	Electroradiologie
	GERBER Robert	Mathématiques Pures
	GIRAUD Pierre	Géologie
	KLEIN Joseph	Mathématiques Pures
Mme	KOFLER Lucie	Botanique et Physiologie végétale
MM.	KOSZUL Jean-Louis	Mathématiques Pures
	KRAVTCHENKO Julien	Mécanique
	KUNTZMANN Jean	Mathématiques appliquées
	LACAZE Albert	Thermodynamique
	LACHARME Jean	Biologie végétale
	LAJZEROWICZ Joseph	Physique
	LATREILLE René	Chirurgie générale
	LATURAZE Jean	Biochimie pharmaceutique
	LAURENT Pierre-Jean	Mathématiques appliquées
	LEDRU Jean	Clinique médicale B
	LLIBOUTRY Louis	Géophysique
	LOUP Jean	Géographie
Mlle	LUTZ Elisabeth	Mathématiques Pures
MM.	MALGRANGE Bernard	Mathématiques Pures
	MALINAS Yves	Clinique obstétricale
	MARTIN-NOEL Pierre	Séméiologie médicale
	MASSEPORT Jean	Géographie
	MAZARE Yves	Clinique médicale A
	MICHEL Robert	Minéralogie et Pétrographie
	MOURIQUAND Claude	Histologie
	MOUSSA André	Chimie nucléaire
	NEEL Louis	Physique du solide
	OZENDA Paul	Botanique
	PAUTHENET René	Electrotechnique
	PAYAN Jean-Jacques	Mathématiques Pures
	PEBAY-PEYROULA Jean-Claude	Physique
	PERRET René	Servomécanismes
	PILLET Emile	Physique industrielle
	RASSAT André	Chimie systématique
	RENARD Michel	Thermodynamique
	REULOS René	Physique industrielle
	RINALDI Renaud	Physique
	ROGET Jean	Clinique de pédiatrie et de puériculture
	SANTON Lucien	Mécanique
	SEIGNEURIN Raymond	Microbiologie et Hygiène
	SENGEL Philippe	Zoologie
	SILBERT Robert	Mécanique des fluides
	SOUTIF Michel	Physique générale

MM.	TANCHE Maurice	Physiologie
	TRAYNARD Philippe	Chimie générale
	VAILLAND François	Zoologie
	VALENTIN Jacques	Physique nucléaire
	VAUQUOIS Bernard	Calcul électronique
Mme	VERAIN Alice	Pharmacie galénique
M.	VERAIN André	Physique
Mme	VEYRET Germaine	Géographie
MM.	VEYRET Paul	Géographie
	VIGNAIS Pierre	Biochimie médicale
	YOCCOZ Jean	Physique nucléaire théorique

PROFESSEURS ASSOCIES

MM.	BULLEMER Bernhard	Physique
	HANO JUN-ICHI	Mathématiques Pures
	STEPHENS Michaël	Mathématiques appliquées

PROFESSEURS SANS CHAIRE

MM.	BEAUDOING André	Pédiatrie
Mme	BERTRANDIAS Françoise	Mathématiques Pures
MM.	BERTRANDIAS Jean-Paul	Mathématiques appliquées
	BIAREZ Jean-Pierre	Mécanique
	BONNETAIN Lucien	Chimie minérale
Mme	BONNIER Jane	Chimie générale
MM.	CARLIER Georges	Biologie végétale
	COHEN Joseph	Electrotechnique
	COUMES André	Radioélectricité
	DEPASSEL Roger	Mécanique des fluides
	DEPORTES Charles	Chimie minérale
	GAUTHIER Yves	Sciences biologiques
	GAVEND Michel	Pharmacologie
	GERMAIN Jean-Pierre	Mécanique
	GIDON Paul	Géologie et Minéralogie
	GLENAT René	Chimie organique
	HACQUES Gérard	Calcul numérique
	JANIN Bernard	Géographie
Mme	KAHANE Josette	Physique
MM.	MULLER Jean-Michel	Thérapeutique
	PERRIAUX Jean-Jacques	Géologie et Minéralogie
	POULOUJADOFF Michel	Electrotechnique
	REBECQ Jacques	Biologie (CUS)
	REVOL Michel	Urologie
	REYMOND Jean-Charles	Chirurgie générale
	ROBERT André	Chimie papetière
	DE ROUGEMONT Jacques	Neurochirurgie
	SARRAZIN Roger	Anatomie et chirurgie
	SARROT-REYNAULD Jean	Géologie
	SIBILLE Robert	Construction mécanique
	SIROT Louis	Chirurgie générale
Mme	SOUTIF Jeanne	Physique générale

MAITRES DE CONFERENCES ET MAITRES DE CONFERENCES AGREGES

Mle	AGNIUS-DELDORD Claudine	Physique pharmaceutique
	ALARY Josette	Chimie analytique
MM.	AMBLARD Pierre	Dermatologie
	AMBROISE-THOMAS Pierre	Parasitologie
	ARMAND Yves	Chimie
	BEGUIN Claude	Chimie organique
	BELORIZKY Elie	Physique
	BENZAKEN Claude	Mathématiques appliquées
	BILLET Jean	Géographie
	BLIMAN Samuel	Electronique (EIE)
	BLOCH Daniel	Electrotechnique
Mme	BOUCHE Liane	Mathématiques (CUS)
MM.	BOUCHET Yves	Anatomie
	BOUVARD Maurice	Mécanique des fluides
	BRODEAU François	Mathématiques (IUT B)
	BRUGEL Lucien	Energétique
	BUISSON Roger	Physique
	BUTEL Jean	Orthopédie
	CHAMBAZ Edmond	Biochimie médicale
	CHAMPETIER Jean	Anatomie et organogénèse
	CHIAVERINA Jean	Biologie appliquée (EFP)
	CHIBON Pierre	Biologie animale
	COHEN-ADDAD Jean-Pierre	Spectrométrie physique
	COLOMB Maurice	Biochimie médicale
	CONTE René	Physique
	COULOMB Max	Radiologie
	CROUZET Guy	Radiologie
	DURAND Francis	Métallurgie
	DUSSAUD René	Mathématiques (CUS)
Mme	ETERRADOSSI Jacqueline	Physiologie
MM.	FAURE Jacques	Médecine légale
	GENSAC Pierre	Botanique
	GIDON Maurice	Géologie
	GRIFFITHS Michaël	Mathématiques appliquées
	GROULADE Joseph	Biochimie médicale
	HOLLARD Daniel	Hématologie
	HUGONOT Robert	Hygiène et Médecine préventive
	IDELMAN Simon	Physiologie animale
	IVANES Marcel	Electricité
	JALBERT Pierre	Histologie
	JOLY Jean-René	Mathématiques Pures
	JOUBERT Jean-Claude	Physique du solide
	JULLIEN Pierre	Mathématiques Pures
	KAHANE André	Physique générale
	KUHN Gérard	Physique
	LACOUME Jean-Louis	Physique
Mme	LAJZEROWICZ Jeannine	Physique
MM.	LANCIA Roland	Physique atomique
	LE JUNTER Noël	Electronique
	LEROY Philippe	Mathématiques
	LOISEAUX Jean-Marie	Physique nucléaire
	LONGEQUEUE Jean-Pierre	Physique nucléaire
	LUU DUC Cuong	Chimie organique
	MACHE Régis	Physiologie végétale
	MAGNIN Robert	Hygiène et Médecine préventive
	MARECHAL Jean	Mécanique
	MARTIN-BOUYER Michel	Chimie (CUS)

MM.	MAYNARD Roger	Physique du solide
	MICHOULIER Jean	Physique (IUT A)
	MICOUD Max	Maladies infectieuses
	MOREAU René	Hydraulique (INP)
	NEGRE Robert	Mécanique
	PARAMELLE Bernard	Pneumologie
	PECCOUD François	Analyse (IUT B)
	PEFFEN René	Métallurgie
	PELMONT Jean	Physiologie animale
	PERRET Jean	Neurologie
	PERRIN Louis	Pathologie expérimentale
	PFISTER Jean-Claude	Physique du solide
	PHELIP Xavier	Rhumatologie
Mlle	RIERY Yvette	Biologie animale
MM.	RACHAIL Michel	Médecine interne
	RACINET Claude	Gynécologie et obstétrique
	RENAUD Maurice	Chimie
	RICHARD Lucien	Botanique
Mme	RINAUDO Marquerite	Chimie macromoléculaire
MM.	ROMIER Guy	Mathématiques (IUT B)
	SHOM Jean-Claude	Chimie générale
	STIEGLITZ Paul	Anesthésiologie
	STOEBNER Pierre	Anatomie pathologique
	VAN CUTSEM Bernard	Mathématiques appliquées
	VEILLON Gérard	Mathématiques appliquées (INP)
	VIALON Pierre	Géologie
	VOOG Robert	Médecine interne
	VIROUSSOS Constantin	Radiologie
	ZADWORYN François	Electronique

MAITRES DE CONFERENCES ASSOCIES

MM.	BOUDOURIS Georges	Radioélectricité
	CHEEKE John	Thermodynamique
	GOLDSCHMIDT Hubert	Mathématiques
	SIDNEY STUARD	Mathématiques Pures
	YACOUD Mahmoud	Médecine légale

CHARGES DE FONCTIONS DE MAITRES DE CONFERENCES

Mme	BERIEL Hélène	Physiologie
Mme	RENAUDET Jacqueline	Microbiologie

Fait le 30 mai 1972.

Ce travail a été préparé à l'Institut de Recherche de Mathématiques Avancées de Grenoble.

Il a été réalisé sous la direction de Monsieur N. GASTINEL, Professeur à l'Université Scientifique et Médicale de Grenoble, mon Maître. Sa constante disponibilité, les orientations qu'il a pu me conseiller, ses encouragements ont permis mon initiation au travail de recherche.

Qu'il veuille bien accepter ici l'expression de ma gratitude et mes plus sincères remerciements.

Monsieur M. ATTEIA, Maître de Conférences à l'Université de Toulouse, a bien voulu s'intéresser à ce travail qui lui doit beaucoup. Je tiens à lui exprimer mes remerciements respectueux et chaleureux.

Je remercie Monsieur P.J. LAURENT, Professeur à l'Université Scientifique et Médicale de Grenoble, qui a bien voulu faire partie du jury.

Monsieur B. MALGRANGE, Professeur à l'Université Scientifique et Médicale de Grenoble, a bien voulu m'encourager au début de mon troisième cycle d'études. Je lui suis reconnaissant de l'intérêt qu'il porte à l'Analyse Numérique en m'honorant de sa présence au sein du jury.

Je veux aussi remercier l'ensemble de mes amis, collègues et aînés du Laboratoire de Mathématiques Appliquées et ceux en particulier de l'Equipe d'Analyse Numérique, pour la sympathie, les encouragements ou conseils qu'ils ont pu me prodiguer.

Mademoiselle TOURNIER a utilisé son temps et sa compétence en calcul formel pour des travaux qui n'apparaissent pas dans ce texte.

Qu'elle en soit ici remerciée.

Ma reconnaissance ira à Mademoiselle PAYERNE et le Service de Reprographie du Laboratoire pour la célérité et la compétence qu'ils ont apporté à la réalisation matérielle de ce travail.

INTRODUCTION

L'intérêt porté depuis quelques années aux méthodes d'éléments finis a relancé l'étude des problèmes d'interpolation à plusieurs variables. Deux types de questions se posent : la construction de tels procédés d'une part, l'estimation de l'erreur d'autre part. La première question est développée dans la littérature relative aux méthodes d'éléments finis (Zienckiewicz [6] par exemple). L'étude de l'erreur d'interpolation est habituellement réalisée par des formules de Taylor ou par l'étude de l'espace de polynômes invariant par le procédé (voir Raviart [5] par exemple) mais ne fournit pas d'expression explicite de l'erreur (sous forme de noyau intégral).

L'un des objets de ce travail est d'obtenir des méthodes assez automatiques pour construire les procédés d'interpolation en essayant d'obtenir, par la construction même, une expression intégrale de l'erreur. Dans le cas du rectangle (ou du cube) des méthodes dues à Gordon ([4]) sont utilisées pour l'obtention d'éléments finis. Des procédés supposant la fonction à interpoler connue sur les lignes d'un quadrillage sont utilisés et étudiés. Dans le cas du triangle, la théorie due à Gordon n'est plus utilisable directement. On propose quelques nouveaux procédés d'interpolation. Dans certains cas, il est possible de donner une expression de l'erreur.

Monsieur ATTEIA a montré ([1], [2], [3]) l'intérêt de l'utilisation des fonctions-spline pour l'étude de méthodes d'éléments finis. L'utilisation du même type de technique pour obtenir des fonctions-spline avec valeurs données sur des lignes nous amène à considérer un problème de trace. Si l'on sait conclure dans \mathbb{R}^2 , ce n'est pas le cas pour \mathbb{R}^3 .

L'étude nous permet néanmoins d'introduire de nouveaux procédés d'interpolation.

Nous suivons donc le plan suivant :

PREMIERE PARTIE

CHAPITRE I	pages
Interpolation à une variable	1
0 Quelques définitions	2
1 Interpolation par une famille de fonctions $C^k([0,1])$	3
La théorie générale de l'interpolation linéaire est rapidement rappelée.	
On étudie un cas particulier où le Wronskien s'annule aux extrémités du segment (p. 11).	
2 Une classe de procédés d'interpolation	14
Il est proposé un procédé d'interpolation de construction très aisée et fournissant un interpolé "régulier".	
CHAPITRE II	
Procédés d'interpolation "rectangles"	22
1 Les treillis distributifs de projecteur	23
Les éléments essentiels de la théorie de Gordon sont rappelés.	
2 Procédés d'interpolation rectangle-généralisés	27
3 Exemples de procédés d'interpolation rectangle sur $[0,1]^2$	31
Un grand nombre d'éléments finis sont étudiés.	
On montre la convergence d'un procédé de Coons (p. 38) et on étudie un procédé d'interpolation de construction simple et fournissant un interpolé régulier (p. 41).	
4 Exemples de procédés d'interpolation rectangle sur $[0,1]^3$	46
Quelques exemples sont explicités.	
5 Quelques autres procédés d'interpolation sur $[0,1]^2$ ou $[0,1]^3$	53
En partie, on construit et donnons l'erreur de l'élément non conforme classique à quatre point.	

CHAPITRE III

	Procédés d'interpolation sur des simplexes de \mathbb{R}^n	56
1	Systèmes de coordonnées relatifs à un simplexe.	58
2	Procédés d'interpolation sur un triangle. Généralités.	64
	Quatre familles de procédés d'interpolation sont construites par l'utilisation de systèmes de coordonnées particuliers au triangle.	
3	Exemples de procédés d'interpolation sur un triangle On explicite dans quelques cas particuliers les familles précédentes.	86
4	Procédés d'interpolation sur un tétraèdre. La méthode de construction est rapidement expliquée.	98

DEUXIEME PARTIE

CHAPITRE IV

	Noyaux et espaces de Hilbert	100
1	Rappels et définitions à propos des noyaux	101
2	Image par une application linéaire continue Le cas de fonction semi-hilbertienne est étudié .	105
3	Fonctions-spline.	108

CHAPITRE V

1	Exemple de fonctions semi-hilbertienne sur $\mathbb{R}^{[0,1]^2}$ $H^k([0,1]^2)$ est défini et des résultats dûs à Ducateau [7] sont rappelés.	110
2	Fonction semi-hilbertienne sur le triangle On considère la trace de la fonction semi- hilbertienne du paragraphe précédent sur le triangle.	112
3	Fonction semi-hilbertienne sur le triangle comme trace de fonction semi-hilbertienne sur $\mathbb{R}^{[0,1]^3}$	115

4	Approche pour la caractérisation de $H^k_0(T)$ $H^k_0(T)$ est caractérisé comme espace satisfaisant un problème d'équations aux dérivées partielles dans \mathbb{R} .	120
5	Applications Deux procédés d'interpolation sont étudiés.	130
6	Etude d'un cas particulier $H^1_0([0,1])$ est constrict comme trace de $H^1_0([0,1]^2)$ sur une diagonale du carré.	137

BIBLIOGRAPHIE

-	de l'introduction	143
-	de la première partie	144
-	de la deuxième partie	146